

# Sciences et peinture : la belle histoire de Van Meegeren

Daniel PERRIN

Antony, université populaire, 18 octobre 2018

## Vermeer et Van Meegeren

Vermeer

Van Meegeren

## Un peu de physique et de mathématiques

Radioactivité

Décroissance exponentielle

L'équilibre radioactif

## Vermeer ou Van Meegeren ?

Le principe

Les calculs

Discussion

## Bonus

Pour des détails, voir ma page web à la rubrique conférences :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/>

Conferences/APM2016/APM2016redaction.pdf

# Vermeer

  

# et Van Meegeren

## Vermeer de Delft

- ▶ Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675). Deux exemples de tableaux : la dame au collier de perles\* et la vue de Delft\*.

## Vermeer de Delft

- ▶ Johannes Vermeer (dit Vermeer de Delft) (1632-1675). Deux exemples de tableaux : la dame au collier de perles\* et la vue de Delft\*.
- ▶ De l'oubli (l'exemple de la jeune fille à la perle\*) à la gloire.

## Voir Delft et mourir ?

- ▶ *Enfin il fut devant le Vermeer ... il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. ... C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur\* jaune\*.*

## Voir Delft et mourir ?

- ▶ *Enfin il fut devant le Vermeer ... il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. ... C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur\* jaune\*.*
- ▶ *Il se répétait : Petit pan de mur jaune avec un auvent, petit pan de mur jaune. Cependant il s'abattit sur un canapé circulaire ... C'est une simple indigestion que m'ont donnée ces pommes de terre pas assez cuites, ce n'est rien. Un nouveau coup l'abattit, il roula du canapé par terre, où accoururent tous les visiteurs et gardiens. Il était mort.*



## Voir Delft et mourir ?

- ▶ *Enfin il fut devant le Vermeer ... il remarqua pour la première fois des petits personnages en bleu, que le sable était rose, et enfin la précieuse matière du tout petit pan de mur jaune. ... C'est ainsi que j'aurais dû écrire, disait-il. Mes derniers livres sont trop secs, il aurait fallu passer plusieurs couches de couleur, rendre ma phrase en elle-même précieuse, comme ce petit pan de mur\* jaune\*.*
- ▶ *Il se répétait : Petit pan de mur jaune avec un auvent, petit pan de mur jaune. Cependant il s'abattit sur un canapé circulaire ... C'est une simple indigestion que m'ont donnée ces pommes de terre pas assez cuites, ce n'est rien. Un nouveau coup l'abattit, il roula du canapé par terre, où accoururent tous les visiteurs et gardiens. Il était mort.*
- ▶ (M. Proust, *La Prisonnière*, cinquième tome d'*À la recherche du temps perdu*, 1923)

# Van Meegeren

- ▶ Han Van Meegeren\*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.

# Van Meegeren

- ▶ Han Van Meegeren\*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- ▶ En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus\* et la femme adultère*.

# Van Meegeren

- ▶ Han Van Meegeren\*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- ▶ En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus\* et la femme adultère*.
- ▶ Il risque la peine de mort pour haute trahison.

# Van Meegeren

- ▶ Han Van Meegeren\*, né en 1889, est un peintre néerlandais de second ordre, marchand de tableaux à ses heures.
- ▶ En mai 1945, il est arrêté pour avoir vendu à Hermann Göring un tableau de Vermeer : *Jésus\* et la femme adultère*.
- ▶ Il risque la peine de mort pour haute trahison.
- ▶ Alors il révèle : *C'est un faux, c'est moi qui l'ai fait\*!* et ajoute qu'il a aussi peint de nombreux\* autres faux Vermeer.

## Van Meegeren (suite)

- ▶ Manque de chance, personne ne le croit. D'autant que parmi les faux qu'il revendique se trouvent *Les disciples\* d'Emmaüs*, vendu en 1938 au musée Boymans de Rotterdam pour une somme équivalente à 4 millions de dollars actuels et authentifié par le plus grand expert de l'époque, Abraham Bredius.

## Van Meegeren (suite)

- ▶ Manque de chance, personne ne le croit. D'autant que parmi les faux qu'il revendique se trouvent *Les disciples\* d'Emmaüs*, vendu en 1938 au musée Boymans de Rotterdam pour une somme équivalente à 4 millions de dollars actuels et authentifié par le plus grand expert de l'époque, Abraham Bredius.
- ▶ Voilà ce que dit Bredius : *Grâce à Dieu, cette œuvre magnifique est sortie de l'ombre où elle se trouvait, immaculée, intacte comme si elle venait tout droit de l'atelier de l'artiste et aussi Nous avons ici un chef-d'œuvre, je dirais LE chef-d'oeuvre de Vermeer, un de ses tableaux les plus grands par ses dimensions, une œuvre totalement différente de toutes les autres, et dont pourtant chaque pouce ne peut être que de Vermeer.*

## Van Meegeren (suite)

- ▶ Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs*\*.



## Van Meegeren (suite)

- ▶ Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs*\*.
- ▶ Cela ébranle les magistrats. Une commission d'enquête est nommée, dirigée par Paul Coremans, qui reconnaît que les tableaux sont des faux. En octobre 1947 Van Meegeren est condamné à un an de prison ... pour faux.

## Van Meegeren (suite)

- ▶ Alors, pour convaincre les incrédules, dans sa cellule, entre juillet et septembre 1945, Van Meegeren peint un autre faux Vermeer *Jésus parmi les docteurs\**.
- ▶ Cela ébranle les magistrats. Une commission d'enquête est nommée, dirigée par Paul Coremans, qui reconnaît que les tableaux sont des faux. En octobre 1947 Van Meegeren est condamné à un an de prison ... pour faux.
- ▶ Malheureusement, il meurt d'une crise cardiaque en décembre 1947.

## Van Meegeren (suite et fin)

- ▶ L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.

## Van Meegeren (suite et fin)

- ▶ L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- ▶ Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.

## Van Meegeren (suite et fin)

- ▶ L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- ▶ Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- ▶ Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).

## Van Meegeren (suite et fin)

- ▶ L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- ▶ Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- ▶ Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).
- ▶ Ce n'est qu'en 1967 que Robert Feller et Bernard Keisch de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh apportent une preuve définitive que les prétendus Vermeer ne pouvaient pas dater de cette époque, à l'aide d'une datation au plomb.

## Van Meegeren (suite et fin)

- ▶ L'histoire ne s'arrête pas là car certains experts refusent d'admettre qu'ils se sont trompés.
- ▶ Par exemple, dans un livre de 1951, Jean Decoen, expert et restaurateur d'art de Bruxelles, affirme que deux des peintures attribuées à Van Meegeren, Les Disciples d'Emmaüs et La Dernière Cène, étaient d'authentiques Vermeer.
- ▶ Autre exemple, le procès Van Beuningen (1956).
- ▶ Ce n'est qu'en 1967 que Robert Feller et Bernard Keisch de l'université Carnegie Mellon de Pittsburgh apportent une preuve définitive que les prétendus Vermeer ne pouvaient pas dater de cette époque, à l'aide d'une datation au plomb.
- ▶ C'est ce que je vais expliquer dans un instant.

## Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !



## Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- ▶ Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.

# Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- ▶ Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- ▶ Les supports, les pigments, les pinceaux.

## Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- ▶ Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- ▶ Les supports, les pigments, les pinceaux.
- ▶ Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.

## Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- ▶ Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- ▶ Les supports, les pigments, les pinceaux.
- ▶ Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.
- ▶ Brédius et le choix du thème : Le Caravage et Emmaüs\*.

## Parenthèse : les techniques de faussaire de Van Meegeren

- ▶ L'aspect psychologique : une sorte de vengeance !
- ▶ Un travail qui s'étale sur une longue période : 1932-1937.
- ▶ Les supports, les pigments, les pinceaux.
- ▶ Pour résister au test à l'alcool : un vernis à base de bakélite.
- ▶ Brédius et le choix du thème : Le Caravage et Emmaüs\*.
- ▶ Épilogue : de faux Vermeer mais de vrais Van Meegeren !

# Un peu de physique et de mathématiques

## La radioactivité

- ▶ Le noyau atomique :  $Z$  protons et  $N$  neutrons :  $A = Z + N$  nucléons. Représentation.\*

## La radioactivité

- ▶ Le noyau atomique :  $Z$  protons et  $N$  neutrons :  $A = Z + N$  nucléons. Représentation.\*
- ▶ L'uranium 238 se note  ${}_{92}^{238}\text{U}$  où 92 est le nombre de protons du noyau (toujours 92 pour l'uranium) et 238 le nombre total de nucléons (donc 146 neutrons). Ce nombre varie selon les isotopes.



## La radioactivité

- ▶ Le noyau atomique :  $Z$  protons et  $N$  neutrons :  $A = Z + N$  nucléons. Représentation.\*
- ▶ L'uranium 238 se note  ${}_{92}^{238}\text{U}$  où 92 est le nombre de protons du noyau (toujours 92 pour l'uranium) et 238 le nombre total de nucléons (donc 146 neutrons). Ce nombre varie selon les isotopes.
- ▶ L'origine de la radioactivité : interaction forte et interaction électromagnétique.

## La radioactivité

- ▶ Le noyau atomique :  $Z$  protons et  $N$  neutrons :  $A = Z + N$  nucléons. Représentation.\*
- ▶ L'uranium 238 se note  ${}_{92}^{238}\text{U}$  où 92 est le nombre de protons du noyau (toujours 92 pour l'uranium) et 238 le nombre total de nucléons (donc 146 neutrons). Ce nombre varie selon les isotopes.
- ▶ L'origine de la radioactivité : interaction forte et interaction électromagnétique.
- ▶ Les radioactivités  $\alpha^+$  et  $\beta^-$  : le tableau\* pour  ${}_{92}^{238}\text{U}$ .

## Les exponentielles

- ▶ Les puissances, exemple  $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$  ( $n$  fois).

## Les exponentielles

- ▶ Les puissances, exemple  $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$  ( $n$  fois).
- ▶ Plus généralement,  $a^n$ , voire  $a^x$  pour  $a > 0$  et  $x$  réel : puissance de  $a$  mais exponentielle de  $x$ . Graphes.

## Les exponentielles

- ▶ Les puissances, exemple  $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$  ( $n$  fois).
- ▶ Plus généralement,  $a^n$ , voire  $a^x$  pour  $a > 0$  et  $x$  réel : puissance de  $a$  mais exponentielle de  $x$ . Graphes.
- ▶ La propriété principale :  $a^{x+y} = a^x \times a^y$ . Exemple :  
 $2^7 = 2^{4+3} = 2^4 \times 2^3$  ou  $(\frac{1}{2})^9 = (\frac{1}{2})^5 \times (\frac{1}{2})^4$ .

## Les exponentielles

- ▶ Les puissances, exemple  $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$  ( $n$  fois).
- ▶ Plus généralement,  $a^n$ , voire  $a^x$  pour  $a > 0$  et  $x$  réel : puissance de  $a$  mais exponentielle de  $x$ . Graphes.
- ▶ La propriété principale :  $a^{x+y} = a^x \times a^y$ . Exemple :  
 $2^7 = 2^{4+3} = 2^4 \times 2^3$  ou  $(\frac{1}{2})^9 = (\frac{1}{2})^5 \times (\frac{1}{2})^4$ .
- ▶ Réciproque : si une fonction croissante ou décroissante vérifie  $f(x+y) = f(x)f(y)$  pour tous  $x, y$  c'est une exponentielle :  
 $f(x) = a^x$ .

## Les exponentielles

- ▶ Les puissances, exemple  $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$  ( $n$  fois).
- ▶ Plus généralement,  $a^n$ , voire  $a^x$  pour  $a > 0$  et  $x$  réel : puissance de  $a$  mais exponentielle de  $x$ . Graphes.
- ▶ La propriété principale :  $a^{x+y} = a^x \times a^y$ . Exemple :  $2^7 = 2^{4+3} = 2^4 \times 2^3$  ou  $(\frac{1}{2})^9 = (\frac{1}{2})^5 \times (\frac{1}{2})^4$ .
- ▶ Réciproque : si une fonction croissante ou décroissante vérifie  $f(x+y) = f(x)f(y)$  pour tous  $x, y$  c'est une exponentielle :  $f(x) = a^x$ .
- ▶ Conséquence sur la croissance : comparer  $x^2$  et  $2^x$  en doublant. Graphes.

## Les hypothèses de la décroissance exponentielle

- ▶ On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses (vérifiées dans le cas de la radioactivité) :



## Les hypothèses de la décroissance exponentielle

- ▶ On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses (vérifiées dans le cas de la radioactivité) :
- ▶ 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est **irréversible**.

## Les hypothèses de la décroissance exponentielle

- ▶ On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses (vérifiées dans le cas de la radioactivité) :
- ▶ 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est **irréversible**.
- ▶ 2) Le changement d'état se fait de manière **aléatoire**.

## Les hypothèses de la décroissance exponentielle

- ▶ On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses (vérifiées dans le cas de la radioactivité) :
- ▶ 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est **irréversible**.
- ▶ 2) Le changement d'état se fait de manière **aléatoire**.
- ▶ 3) Les individus sont égaux entre eux devant la mort : ni malades, ni faibles, ni forts : le phénomène est **égalitaire**.

## Les hypothèses de la décroissance exponentielle

- ▶ On considère une population susceptible d'être dans deux états : vie ou mort, Carbone 14 ou 12, Plomb 210 ou 206, etc. On fait quatre hypothèses (vérifiées dans le cas de la radioactivité) :
- ▶ 1) On passe d'un état à l'autre (de vie à trépas), mais pas l'inverse (pas de naissances) : le phénomène est **irréversible**.
- ▶ 2) Le changement d'état se fait de manière **aléatoire**.
- ▶ 3) Les individus sont égaux entre eux devant la mort : ni malades, ni faibles, ni forts : le phénomène est **égalitaire**.
- ▶ 4) Les chances de mourir sont les mêmes au cours du temps : c'est un phénomène **sans vieillissement**.

## Établir la décroissance exponentielle

- ▶ On appelle  $N(t)$  le nombre d'individus en vie au temps  $t$ .

## Établir la décroissance exponentielle

- ▶ On appelle  $N(t)$  le nombre d'individus en vie au temps  $t$ .
- ▶ La fonction  $N(t)$  est décroissante.

## Établir la décroissance exponentielle

- ▶ On appelle  $N(t)$  le nombre d'individus en vie au temps  $t$ .
- ▶ La fonction  $N(t)$  est décroissante.
- ▶ On modélise le phénomène en termes de probabilités.

## Établir la décroissance exponentielle

- ▶ On appelle  $N(t)$  le nombre d'individus en vie au temps  $t$ .
- ▶ La fonction  $N(t)$  est décroissante.
- ▶ On modélise le phénomène en termes de probabilités.
- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est  $\frac{N(t) - N(t + h)}{N(t)}$  : le nombre de cas "favorables" divisé par le nombre de cas total.



## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).

## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).
- ▶ Pour tous  $t, h > 0$  on a 
$$\frac{N(t) - N(t + h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$

## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).

- ▶ Pour tous  $t, h > 0$  on a 
$$\frac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$

- ▶ D'où  $1 - \frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \frac{N(h)}{N(0)}$  donc 
$$\frac{N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(h)}{N(0)}$$

## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).
- ▶ Pour tous  $t, h > 0$  on a 
$$\frac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$
- ▶ D'où  $1 - \frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \frac{N(h)}{N(0)}$  donc  $\frac{N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(h)}{N(0)}$
- ▶ ou encore  $N(t+h)N(0) = N(t)N(h)$ , presque la relation fonctionnelle !

## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).
- ▶ Pour tous  $t, h > 0$  on a 
$$\frac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}$$
- ▶ D'où  $1 - \frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \frac{N(h)}{N(0)}$  donc  $\frac{N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(h)}{N(0)}$
- ▶ ou encore  $N(t+h)N(0) = N(t)N(h)$ , presque la relation fonctionnelle !
- ▶ On divise par  $N(0)^2$  : 
$$\frac{N(t+h)}{N(0)} = \frac{N(t)}{N(0)} \times \frac{N(h)}{N(0)}$$

## Établir la décroissance exponentielle (suite)

- ▶ La probabilité pour un individu de mourir entre les temps  $t$  et  $t + h$  est la même que celle de mourir entre 0 et  $h$  (pas de vieillissement).

- ▶ Pour tous  $t, h > 0$  on a 
$$\frac{N(t) - N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(0) - N(h)}{N(0)}.$$

- ▶ D'où  $1 - \frac{N(t+h)}{N(t)} = 1 - \frac{N(h)}{N(0)}$  donc  $\frac{N(t+h)}{N(t)} = \frac{N(h)}{N(0)}$

- ▶ ou encore  $N(t+h)N(0) = N(t)N(h)$ , presque la relation fonctionnelle !

- ▶ On divise par  $N(0)^2$  : 
$$\frac{N(t+h)}{N(0)} = \frac{N(t)}{N(0)} \times \frac{N(h)}{N(0)}$$

- ▶ donc  $f(t) = N(t)/N(0)$  transforme sommes en produits donc c'est une exponentielle :  $f(t) = \frac{N(t)}{N(0)} = a^t$  ou encore

$$N(t) = N(0)a^t \text{ avec } a < 1.$$

## Retour à la radioactivité

- ▶ Le phénomène de radioactivité satisfait les hypothèses précédentes (aléatoire, irréversible, égalitaire, sans vieillissement) donc si un atome ou un isotope  $A$  (instable) donne un isotope  $B$ , c'est selon la loi précédente :  
 $A(t) = A(0)a^t$ , avec  $a < 1$  (au moins s'il n'y a pas d'autres atomes qui interviennent).

## Retour à la radioactivité

- ▶ Le phénomène de radioactivité satisfait les hypothèses précédentes (aléatoire, irréversible, égalitaire, sans vieillissement) donc si un atome ou un isotope  $A$  (instable) donne un isotope  $B$ , c'est selon la loi précédente :  
 $A(t) = A(0)a^t$ , avec  $a < 1$  (au moins s'il n'y a pas d'autres atomes qui interviennent).
- ▶ On connaît parfaitement le phénomène dès que l'on connaît la constante  $a$ .



## La radioactivité (suite)

- ▶ La période (ou demi-vie\*) est le temps  $T$  tel que  $A(T) = A(0)/2$  donc  $a^T = \frac{1}{2}$ . Connaître  $a$  ou connaître la période c'est pareil : on a  $T = -\ln 2 / \ln a$ .

## La radioactivité (suite)

- ▶ La période (ou demi-vie\*) est le temps  $T$  tel que  $A(T) = A(0)/2$  donc  $a^T = \frac{1}{2}$ . Connaître  $a$  ou connaître la période c'est pareil : on a  $T = -\ln 2 / \ln a$ .
- ▶ Exemples de périodes : uranium 238, 4.5 milliards d'années, radium 226, 1600 ans, plomb 210, 22 ans. Le tableau\* pour  ${}_{92}^{238}\text{U}$ .

## La radioactivité (suite)

- ▶ La période (ou demi-vie\*) est le temps  $T$  tel que  $A(T) = A(0)/2$  donc  $a^T = \frac{1}{2}$ . Connaître  $a$  ou connaître la période c'est pareil : on a  $T = -\ln 2 / \ln a$ .
- ▶ Exemples de périodes : uranium 238, 4.5 milliards d'années, radium 226, 1600 ans, plomb 210, 22 ans. Le tableau\* pour  ${}_{92}^{238}\text{U}$ .
- ▶ Cela donne les coefficients  $a$  correspondants, notés  $u, r, p$ , tous très proches de 1 :  $u = 1 - k_u$ ,  $r = 1 - k_r$ ,  $p = 1 - k_p$  avec  $k_u = 0.29 \times 10^{-15}$ ,  $k_r = 0.82 \times 10^{-9}$  et  $k_p = 0.59 \times 10^{-7}$ .

## Vitesse de désintégration

- ▶ Quand on a un phénomène radioactif, donné par  $A(t) = A(0)a^t$ , la quantité accessible aux mesures est la **vitesse de désintégration**  $A'(t)$  au temps  $t$  (souvent exprimée en nombre d'atomes par minute).

## Vitesse de désintégration

- ▶ Quand on a un phénomène radioactif, donné par  $A(t) = A(0)a^t$ , la quantité accessible aux mesures est la **vitesse de désintégration**  $A'(t)$  au temps  $t$  (souvent exprimée en nombre d'atomes par minute).
- ▶ Pour un laps de temps  $h$  petit cette vitesse c'est le nombre (négatif) d'atomes  $A(t+h) - A(t)$  apparus dans le laps de temps  $h$ , divisé par  $h$  :

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = A(0) \frac{a^{t+h} - a^t}{h} = A(0)a^t \frac{a^h - 1}{h} = A(t) \frac{a^h - 1}{h}$$

## Vitesse de désintégration

- ▶ Quand on a un phénomène radioactif, donné par  $A(t) = A(0)a^t$ , la quantité accessible aux mesures est la **vitesse de désintégration**  $A'(t)$  au temps  $t$  (souvent exprimée en nombre d'atomes par minute).
- ▶ Pour un laps de temps  $h$  petit cette vitesse c'est le nombre (négatif) d'atomes  $A(t+h) - A(t)$  apparus dans le laps de temps  $h$ , divisé par  $h$  :

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = A(0) \frac{a^{t+h} - a^t}{h} = A(0)a^t \frac{a^h - 1}{h} = A(t) \frac{a^h - 1}{h}$$

- ▶ On montre, voir Bonus, que si  $a = 1 - k_a$  et si  $h$  est petit, on a  $\frac{a^h - 1}{h} \sim -k_a$ . On a donc  $A'(t) \sim -k_a A(t)$ .

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- ▶ On suppose qu'on a deux corps  $A$  et  $B$  radioactifs,  $A$  donnant  $B$  (qui lui-même se transforme en  $C$ ).

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- ▶ On suppose qu'on a deux corps  $A$  et  $B$  radioactifs,  $A$  donnant  $B$  (qui lui-même se transforme en  $C$ ).
- ▶ L'expérience montre que, si la période de  $A$  est nettement plus grande que celle de  $B$ , au bout d'un temps assez long il se crée un **équilibre radioactif** : la désintégration de  $B$  est compensée (presque) exactement par celle de  $A$ , autrement dit, le rapport des vitesses de désintégration est voisin\* de 1.



## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- ▶ On suppose qu'on a deux corps  $A$  et  $B$  radioactifs,  $A$  donnant  $B$  (qui lui-même se transforme en  $C$ ).
- ▶ L'expérience montre que, si la période de  $A$  est nettement plus grande que celle de  $B$ , au bout d'un temps assez long il se crée un **équilibre radioactif** : la désintégration de  $B$  est compensée (presque) exactement par celle de  $A$ , autrement dit, le rapport des vitesses de désintégration est voisin\* de 1.
- ▶ Par exemple, si  $A$  est l'uranium 238 et  $B$  le radium 226, la limite est 1,000000355 et il suffit de 32000 ans (autant dire rien par rapport à la période de l'uranium) pour que cette limite soit atteinte à  $10^{-6}$  près.

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, l'expérience

- ▶ On suppose qu'on a deux corps  $A$  et  $B$  radioactifs,  $A$  donnant  $B$  (qui lui-même se transforme en  $C$ ).
- ▶ L'expérience montre que, si la période de  $A$  est nettement plus grande que celle de  $B$ , au bout d'un temps assez long il se crée un **équilibre radioactif** : la désintégration de  $B$  est compensée (presque) exactement par celle de  $A$ , autrement dit, le rapport des vitesses de désintégration est voisin\* de 1.
- ▶ Par exemple, si  $A$  est l'uranium 238 et  $B$  le radium 226, la limite est 1,000000355 et il suffit de 32000 ans (autant dire rien par rapport à la période de l'uranium) pour que cette limite soit atteinte à  $10^{-6}$  près.
- ▶ Pour une explication mathématique de ce phénomène, voir Bonus ou ma page web.

## Équilibre radioactif avec trois corps ou plus

Le même résultat vaut si l'on a trois corps  $A$ ,  $B$ ,  $C$  radioactifs,  $A$  donnant  $B$ , qui lui-même se transforme en  $C$ , lequel donne  $D$  : les vitesses de désintégration  $A'(t)$ ,  $B'(t)$  et  $C'(t)$  sont à peu près égales lorsque  $t$  est grand (indépendamment des quantités initiales).

C'est le cas si  $A$  est l'uranium 238,  $B$  le radium 226,  $C$  le plomb 210 et  $D$  le plomb 206.

# Vermeer ou Van Meegeren ?

## Le principe : datation au plomb

Parmi les couleurs couramment utilisées par les peintres depuis l'antiquité, il y a la céruse ou blanc de plomb. Il s'agit d'un carbonate de plomb qui contient deux isotopes radioactifs (provenant de la désintégration de l'uranium-238) : le plomb-210 et le radium-226. Encore le tableau\*.

## Le principe : datation au plomb (suite)

- ▶ Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.

## Le principe : datation au plomb (suite)

- ▶ Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.
- ▶ Lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories.

## Le principe : datation au plomb (suite)

- ▶ Tant que le minerai n'est pas extrait, on a vu qu'il y a équilibre radioactif : la désintégration du plomb est compensée par celle du radium, elle-même compensée par celle de l'uranium.
- ▶ Lors du traitement du minerai en vue d'en extraire le plomb, 90 à 95 % du radium et de l'uranium sont éliminés avec les scories.
- ▶ Dans le plomb purifié utilisé en peinture, la désintégration du plomb n'est donc plus compensée par celle du radium : la concentration en plomb 210 diminue plus vite que celle du radium.



## Le principe : datation au plomb (suite)

- ▶ On prélève un (petit) échantillon du tableau incriminé et on mesure essentiellement deux choses :
  - la vitesse de désintégration du plomb 210,
  - celle du radium résiduel.

## Le principe : datation au plomb (suite)

- ▶ On prélève un (petit) échantillon du tableau incriminé et on mesure essentiellement deux choses :
  - la vitesse de désintégration du plomb 210,
  - celle du radium résiduel.
- ▶ Les appareils de mesure : compteurs de type Geiger, détecteurs à ionisation, à scintillation, thermoluminescents, etc.

## Les mathématiques

- ▶ On appelle  $P(t)$  la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb 210 au temps  $t$ ,  $R(t)$  celle de radium dans l'échantillon de peinture.

## Les mathématiques

- ▶ On appelle  $P(t)$  la quantité (en nombre d'atomes par gramme de blanc de plomb) de plomb 210 au temps  $t$ ,  $R(t)$  celle de radium dans l'échantillon de peinture.
- ▶ Lorsque les corps sont isolés, ces quantités sont des exponentielles :  $P(t) = P(0)p^t$ , etc. avec des coefficients (en  $mn^{-1}$ , calculés à partir des périodes)  $r = 1 - k_r$ ,  $p = 1 - k_p$  avec  $k_r = 0.82 \times 10^{-9}$  et  $k_p = 0.59 \times 10^{-7}$ .

## Les équations

- ▶ Si le plomb 210 était isolé, sa vitesse de désintégration serait proportionnelle à la quantité de plomb :  $P'(t) = -k_p P(t)$ .

## Les équations

- ▶ Si le plomb 210 était isolé, sa vitesse de désintégration serait proportionnelle à la quantité de plomb :  $P'(t) = -k_p P(t)$ .
- ▶ Mais elle est partiellement compensée par l'apport de la désintégration du radium :  $P'(t) = -k_p P(t) + R'(t)$ , ou encore  $P'(t) - R'(t) = -k_p P(t)$ .

## Les équations

- ▶ Si le plomb 210 était isolé, sa vitesse de désintégration serait proportionnelle à la quantité de plomb :  $P'(t) = -k_p P(t)$ .
- ▶ Mais elle est partiellement compensée par l'apport de la désintégration du radium :  $P'(t) = -k_p P(t) + R'(t)$ , ou encore  $P'(t) - R'(t) = -k_p P(t)$ .
- ▶ On écrit cette équation au temps 0 (la peinture du tableau, 1650 ?) et au temps  $T$  (l'examen du tableau, 1967) :  
 $P'(0) - R'(0) = -k_p P(0)$ ,  $P'(T) - R'(T) = -k_p P(T)$ .

## Déterminer $T$

► Cela donne : 
$$\frac{P(T)}{P(0)} = p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)}.$$



## Déterminer $T$

- ▶ Cela donne :  $\frac{P(T)}{P(0)} = p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)}$ .
- ▶ On cherche  $T$ . Si l'on connaît  $p^T$  on en déduit  $T$  et on a gagné.

## Déterminer $T$

- ▶ Cela donne :  $\frac{P(T)}{P(0)} = p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)}$ .
- ▶ On cherche  $T$ . Si l'on connaît  $p^T$  on en déduit  $T$  et on a gagné.
- ▶ Dans cette formule on mesure les vitesses de désintégration en 1967 :  $P'(T) \sim 8.5$  et  $R'(T) \sim 0.8$ .

## Déterminer $T$

- ▶ Cela donne :  $\frac{P(T)}{P(0)} = p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)}$ .
- ▶ On cherche  $T$ . Si l'on connaît  $p^T$  on en déduit  $T$  et on a gagné.
- ▶ Dans cette formule on mesure les vitesses de désintégration en 1967 :  $P'(T) \sim 8.5$  et  $R'(T) \sim 0.8$ .
- ▶ Comme la période du radium est grande par rapport aux temps considérés, on peut considérer que  $R(t)$  (donc aussi  $R'(t)$ ) est constant donc qu'on a  $R'(0) = R'(T)$ .

## Déterminer $T$

- ▶ Cela donne :  $\frac{P(T)}{P(0)} = p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)}$ .
- ▶ On cherche  $T$ . Si l'on connaît  $p^T$  on en déduit  $T$  et on a gagné.
- ▶ Dans cette formule on mesure les vitesses de désintégration en 1967 :  $P'(T) \sim 8.5$  et  $R'(T) \sim 0.8$ .
- ▶ Comme la période du radium est grande par rapport aux temps considérés, on peut considérer que  $R(t)$  (donc aussi  $R'(t)$ ) est constant donc qu'on a  $R'(0) = R'(T)$ .
- ▶ Le problème c'est qu'on ignore ce que vaut  $P'(0)$ , vitesse de désintégration du plomb au temps (soi-disant) de Vermeer.

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On va **majorer** la quantité inconnue  $P'(0)$ . Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif** : au temps 0 (ou peu avant l'exécution de la toile), les vitesses de désintégration de l'uranium et du plomb **dans le minerai** sont les mêmes :  
 $U'(0) \sim P'(0)$ .

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On va **majorer** la quantité inconnue  $P'(0)$ . Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif** : au temps 0 (ou peu avant l'exécution de la toile), les vitesses de désintégration de l'uranium et du plomb **dans le minerai** sont les mêmes :  
 $U'(0) \sim P'(0)$ .
- ▶ Mais  $P(0)$  (donc aussi  $P'(0)$ ) est le même dans le minerai et le tableau.

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On va **majorer** la quantité inconnue  $P'(0)$ . Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif** : au temps 0 (ou peu avant l'exécution de la toile), les vitesses de désintégration de l'uranium et du plomb **dans le minerai** sont les mêmes :  
 $U'(0) \sim P'(0)$ .
- ▶ Mais  $P(0)$  (donc aussi  $P'(0)$ ) est le même dans le minerai et le tableau.
- ▶ On a donc  $P'(0) \sim U'(0) = -k_u U(0)$ ,  $k_u \sim 0.29 \times 10^{-15}$ .

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On va **majorer** la quantité inconnue  $P'(0)$ . Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif** : au temps 0 (ou peu avant l'exécution de la toile), les vitesses de désintégration de l'uranium et du plomb **dans le minerai** sont les mêmes :  
 $U'(0) \sim P'(0)$ .
- ▶ Mais  $P(0)$  (donc aussi  $P'(0)$ ) est le même dans le minerai et le tableau.
- ▶ On a donc  $P'(0) \sim U'(0) = -k_u U(0)$ ,  $k_u \sim 0.29 \times 10^{-15}$ .
- ▶ On ne connaît pas  $U(0)$  qui est le nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb au temps de Vermeer.



## Majorer $P'(0)$

- ▶ On va **majorer** la quantité inconnue  $P'(0)$ . Pour cela, on part de la remarque de **l'équilibre radioactif** : au temps 0 (ou peu avant l'exécution de la toile), les vitesses de désintégration de l'uranium et du plomb **dans le minerai** sont les mêmes :  
 $U'(0) \sim P'(0)$ .
- ▶ Mais  $P(0)$  (donc aussi  $P'(0)$ ) est le même dans le minerai et le tableau.
- ▶ On a donc  $P'(0) \sim U'(0) = -k_u U(0)$ ,  $k_u \sim 0.29 \times 10^{-15}$ .
- ▶ On ne connaît pas  $U(0)$  qui est le nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb au temps de Vermeer.
- ▶ Mais on va le majorer.

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On peut considérer que le nombre  $U(0)$  n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle, donc qu'il est égal à  $U(T)$ , nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb actuel.

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On peut considérer que le nombre  $U(0)$  n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle, donc qu'il est égal à  $U(T)$ , nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb actuel.
- ▶ Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On peut considérer que le nombre  $U(0)$  n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle, donc qu'il est égal à  $U(T)$ , nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb actuel.
- ▶ Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- ▶ En moyenne elle est  $2.7 \times 10^{-6}$  grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à  $0.03 g$ .

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On peut considérer que le nombre  $U(0)$  n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle, donc qu'il est égal à  $U(T)$ , nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb actuel.
- ▶ Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- ▶ En moyenne elle est  $2.7 \times 10^{-6}$  grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à  $0.03 g$ .
- ▶ On fait le calcul dans ce cas extrême :

$$U(0) \leq \frac{6.02 \times 10^{23} \times 0.03}{238} \sim 7.58 \times 10^{19}$$

## Majorer $P'(0)$

- ▶ On peut considérer que le nombre  $U(0)$  n'a pas changé depuis le XVII-ième siècle, donc qu'il est égal à  $U(T)$ , nombre d'atomes d'uranium dans un gramme de minerai de plomb actuel.
- ▶ Attention, la teneur en uranium des minerais de plomb est très variable.
- ▶ En moyenne elle est  $2.7 \times 10^{-6}$  grammes d'uranium (par gramme de minerai), mais pour certains minerais américains elle vaut jusqu'à  $0.03 g$ .
- ▶ On fait le calcul dans ce cas extrême :

$$U(0) \leq \frac{6.02 \times 10^{23} \times 0.03}{238} \sim 7.58 \times 10^{19}$$

- ▶ On a  $U'(0) = k_u U(0) \leq 0.293 \times 10^{-15} \times 7.58 \times 10^{19} \sim 22200$   
(avec la valeur moyenne :  $U'(0) \simeq 2$ ).

## Conclusion sur Van Meegeren

- ▶ Rappelons la formule ( $T$  désigne l'âge du tableau) :

$$p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)} \text{ avec } P'(T) \sim 8.5, R'(T) \sim R'(0) \sim 0.8$$

et  $P'(0) \sim U'(0) \leq 22200$ .

## Conclusion sur Van Meegeren

- ▶ Rappelons la formule ( $T$  désigne l'âge du tableau) :

$$p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)} \text{ avec } P'(T) \sim 8.5, R'(T) \sim R'(0) \sim 0.8$$

et  $P'(0) \sim U'(0) \leq 22200$ .

- ▶ On en déduit  $p^T \geq \frac{7.7}{22200 - 0.8} \sim \frac{1}{2883}$  donc, comme  $p^t$  est décroissante puisque  $p < 1$ ,  $T \leq 132\,900\,000$  (en minutes).



## Conclusion sur Van Meegeren

- ▶ Rappelons la formule ( $T$  désigne l'âge du tableau) :

$$p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)} \text{ avec } P'(T) \sim 8.5, R'(T) \sim R'(0) \sim 0.8$$

et  $P'(0) \sim U'(0) \leq 22200$ .

- ▶ On en déduit  $p^T \geq \frac{7.7}{22200 - 0.8} \sim \frac{1}{2883}$  donc, comme  $p^t$  est décroissante puisque  $p < 1$ ,  $T \leq 132\,900\,000$  (en minutes).
- ▶ Soit, en années,  $T \leq 132900000 / (60 \times 24 \times 365) \sim 253$  ans.

## Conclusion sur Van Meegeren

- ▶ Rappelons la formule ( $T$  désigne l'âge du tableau) :

$$p^T = \frac{P'(T) - R'(T)}{P'(0) - R'(0)} \text{ avec } P'(T) \sim 8.5, R'(T) \sim R'(0) \sim 0.8$$

et  $P'(0) \sim U'(0) \leq 22200$ .

- ▶ On en déduit  $p^T \geq \frac{7.7}{22200 - 0.8} \sim \frac{1}{2883}$  donc, comme  $p^t$  est décroissante puisque  $p < 1$ ,  $T \leq 132\,900\,000$  (en minutes).
- ▶ Soit, en années,  $T \leq 132900000 / (60 \times 24 \times 365) \sim 253$  ans.
- ▶ Au plus tôt la peinture daterait de 1714, 40 ans après la mort de Vermeer !

## La science et les experts

- ▶ Un conseil aux apprentis faussaires ...

## La science et les experts

- ▶ Un conseil aux apprentis faussaires ...
- ▶ On a vu qu'il arrive que les experts se trompent et c'est encore le cas aujourd'hui, voir *L'affaire Beltracchi* de S. Koldehoff et T. Tim ou *Autoportrait d'un faussaire* de G. Ribes.

## La science et les experts

- ▶ Un conseil aux apprentis faussaires ...
- ▶ On a vu qu'il arrive que les experts se trompent et c'est encore le cas aujourd'hui, voir *L'affaire Beltracchi* de S. Koldehoff et T. Tim ou *Autoportrait d'un faussaire* de G. Ribes.
- ▶ L'exemple de Van Meegeren est révélateur de l'intérêt d'une approche scientifique (pluridisciplinaire), pour discuter les affirmations des experts. Attention toutefois, elle ne résout pas tout, voir l'exemple du Caravage. 1 2

## Maintenant, les experts c'est vous

- ▶ De ces deux peintures, l'une est un faux. Laquelle? 1 2

## Maintenant, les experts c'est vous

- ▶ De ces deux peintures, l'une est un faux. Laquelle? 1 2
- ▶ Je vous remercie de votre attention.

# Bonus



## Les exponentielles

- ▶ Pourquoi  $a^0 = 1$  ? On a  $a^{n+0} = a^n$ , si on veut garder l'équation fonctionnelle  $a^{n+0} = a^n \times a^0 = a^n$  on doit poser  $a^0 = 1$ .

## Les exponentielles

- ▶ Pourquoi  $a^0 = 1$  ? On a  $a^{n+0} = a^n$ , si on veut garder l'équation fonctionnelle  $a^{n+0} = a^n \times a^0 = a^n$  on doit poser  $a^0 = 1$ .
- ▶ Pourquoi  $a^{-1} = 1/a$  ? C'est la même raison :  
 $a^0 = 1 = a^{1-1} = a^1 \times a^{-1}$ , donc  $a^{-1}$  est l'inverse de  $a$ .

## Les exponentielles

- ▶ Pourquoi  $a^0 = 1$  ? On a  $a^{n+0} = a^n$ , si on veut garder l'équation fonctionnelle  $a^{n+0} = a^n \times a^0 = a^n$  on doit poser  $a^0 = 1$ .
- ▶ Pourquoi  $a^{-1} = 1/a$  ? C'est la même raison :  $a^0 = 1 = a^{1-1} = a^1 \times a^{-1}$ , donc  $a^{-1}$  est l'inverse de  $a$ .
- ▶ Pourquoi  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$  ? Encore l'équation fonctionnelle :  $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ .

## Un calcul approché

- ▶ Si  $a = 1 - k_a$ , on a  $\frac{a^h - 1}{h} \sim -k_a$  si  $k_a$  est petit.

## Un calcul approché

- ▶ Si  $a = 1 - k_a$ , on a  $\frac{a^h - 1}{h} \sim -k_a$  si  $k_a$  est petit.
- ▶ Penser à  $(1 - k_a)^2 = 1 - 2k_a + k_a^2$ , si  $k_a$  est petit,  $k_a^2$  est beaucoup plus petit que  $2k_a$  et donc  $(1 - k_a)^2 \sim 1 - 2k_a$ .

## Un calcul approché

- ▶ Si  $a = 1 - k_a$ , on a  $\frac{a^h - 1}{h} \sim -k_a$  si  $k_a$  est petit.
- ▶ Penser à  $(1 - k_a)^2 = 1 - 2k_a + k_a^2$ , si  $k_a$  est petit,  $k_a^2$  est beaucoup plus petit que  $2k_a$  et donc  $(1 - k_a)^2 \sim 1 - 2k_a$ .
- ▶ De même  $(1 - k_a)^h \sim 1 - hk_a$ , donc  $\frac{a^h - 1}{h} \sim \frac{-hk_a}{h} = -k_a$ .

## Un calcul approché

- ▶ Si  $a = 1 - k_a$ , on a  $\frac{a^h - 1}{h} \sim -k_a$  si  $k_a$  est petit.
- ▶ Penser à  $(1 - k_a)^2 = 1 - 2k_a + k_a^2$ , si  $k_a$  est petit,  $k_a^2$  est beaucoup plus petit que  $2k_a$  et donc  $(1 - k_a)^2 \sim 1 - 2k_a$ .
- ▶ De même  $(1 - k_a)^h \sim 1 - hk_a$ , donc  $\frac{a^h - 1}{h} \sim \frac{-hk_a}{h} = -k_a$ .
- ▶ Pour les experts  $\frac{a^h - 1}{h}$  tend vers  $\ln a$  quand  $h$  tend vers 0 et, pour  $a = 1 - k_a$  avec  $k_a$  petit, on a  $\ln a \sim -k_a$ .

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- ▶ On a vu qu'on a  $A'(t) = -k_a A(t)$ .



## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- ▶ On a vu qu'on a  $A'(t) = -k_a A(t)$ .
- ▶ Pour  $B'(t)$  il y a l'effet de la désintégration de  $B$  :  $-k_b B(t)$ , mais, attention, partiellement composée par la désintégration de  $A$  :  $B'(t) = k_a A(t) - k_b B(t)$ .

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- ▶ On a vu qu'on a  $A'(t) = -k_a A(t)$ .
- ▶ Pour  $B'(t)$  il y a l'effet de la désintégration de  $B$  :  $-k_b B(t)$ , mais, attention, partiellement composée par la désintégration de  $A$  :  $B'(t) = k_a A(t) - k_b B(t)$ .

- ▶ Le rapport des vitesses est donc
$$\frac{B'(t)}{A'(t)} = \frac{k_a A(t) - k_b B(t)}{k_a A(t)} = 1 - \frac{k_b B(t)}{k_a A(t)}.$$

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps, les mathématiques

- ▶ On a vu qu'on a  $A'(t) = -k_a A(t)$ .
- ▶ Pour  $B'(t)$  il y a l'effet de la désintégration de  $B$  :  $-k_b B(t)$ , mais, attention, partiellement composée par la désintégration de  $A$  :  $B'(t) = k_a A(t) - k_b B(t)$ .
- ▶ Le rapport des vitesses est donc
$$\frac{B'(t)}{A'(t)} = \frac{k_a A(t) - k_b B(t)}{k_a A(t)} = 1 - \frac{k_b B(t)}{k_a A(t)}.$$
- ▶ Mais  $B$  est de l'ordre de  $b^t$ ,  $A$  de  $a^t$  et  $a > b$  car la période de  $A$  est plus grande que celle de  $B$ , donc cette quantité est proche de 1 pour  $t$  grand.

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps (suite)

- ▶ Si la période  $T$  du corps  $A$  est grande par rapport à celle  $S$  de  $B$ , la limite du rapport des vitesses de désintégration est voisine de 1 (c'est  $\frac{T}{T - S}$ ) : on a bien un équilibre radioactif.

## Équilibre radioactif : l'exemple de deux corps (suite)

- ▶ Si la période  $T$  du corps  $A$  est grande par rapport à celle  $S$  de  $B$ , la limite du rapport des vitesses de désintégration est voisine de 1 (c'est  $\frac{T}{T-S}$ ) : on a bien un équilibre radioactif.
- ▶ Par exemple, si  $A$  est l'uranium 238 et  $B$  le radium 226, la limite est 1,000000355 et il suffit de 32000 ans (autant dire rien par rapport à la période de l'uranium) pour que cette limite soit atteinte à  $10^{-6}$  près.

L'origine de mon intérêt\* pour la radioactivité\* ?